SISTEMAS (ROUCHÉ – CRAMER) FICHA 5

1) Estudia, según los valores de a y b, la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+az=1 \\ 2x+y+az=3 \\ x+2y-az=b \end{array}\right\}$$

2) Dado el sistema $\left.\begin{array}{l} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{array}\right\}$

a) Comprueba que es compatible para cualquier valor de a.
b) Resuélvelo para $a=-2$

3) Estudia según los valores de a y b, el sistema $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=b \\ 2x-y+z=2 \\ x+ay+2z=3 \end{array}\right\}$ y resuélvelo cuando sea compatible determinado.

4) Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=3 \\ -x+3y=-1 \\ -x+6y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) $\left.\begin{array}{r} x-y+az=1 \\ 2x+y+az=3 \\ x+2y-az=b \end{array}\right\} \to A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ 1 & 2 & -a & b \end{pmatrix}$ y $|A|=-3a=0 \Rightarrow a=0$

- Si $a \neq 0 \to |A| \neq 0 \to rang(A)=3=rang(A')=\text{n} \to$ S. C. DETERMINADO
- Si $a=0 \to A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b-6=0 \Rightarrow b=2$
- Si $a=0$ y $b \neq 2 \to rang(A)=2 \neq rang(A')=3 \to$ S. INCOMPATIBLE
- Si $a=0$ y $b=2 \to rang(A)=2=rang(A')=2 \to$ S. C. INDETERMINADO

$\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\} \to 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \to \frac{4}{3}-y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \to SOL\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},t\right);$

2) $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{array}\right\} A'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{pmatrix}$

$|A|=a^3-3a+2=0 \Rightarrow a=\left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array}\right.$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \to rang(A)=3=rang(A')=n \to$ S.C.DETERMINADO
- Si $a=1 \to x+y+z=0\}$ una ecuación y 3 incógnitas S.C. INDETERMINADO
- Si $a=-2 \to rang(A)=2=rang(A')=2 \to$ SC INDETERMINADO

$\left.\begin{array}{r} -2x+y=-z \\ x-2y=-z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2x+y=-z \\ 2x-4y=-2z \end{array}\right\} \to -3y=-3z \Rightarrow y=z \to -2x=-2z \Rightarrow x=z$

SOL: $x=t;\ y=t;\ z=t$

3) $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=b \\ 2x-y+z=2 \\ x+ay+2z=3 \end{array}\right\} \to A'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \to |A|=3a=0 \to a=0$

- Si $a \neq 0 \to rang(A')=3=rang(A')=3 \to$ S. COMP. DETERMINADO

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}}{3a}=\dfrac{2+2a-2b-ab}{3a}; \qquad y=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & b & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{3a}=\dfrac{3-3b}{3a}=\dfrac{1-b}{a}$

$z=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix}}{3a}=\dfrac{-1+2a+b+2ab}{3a}$

- Si $a=0 \;\rightarrow A'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = b-1=0 \rightarrow b=1$
- Si $a=0$ y $b=1 \rightarrow rang(A')=2=rang(A)=2=n \rightarrow$ S.C.INDETERMINADO
- Si $a=0$ y $b\neq 1 \rightarrow rang(A')=3\neq rang(A)=2=n \rightarrow$ S. INCOMPATIBLE

4) $\left.\begin{array}{r} x-2y=3 \\ -x+3y=-1 \\ -x+6y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\neq 0 \Rightarrow rang(A)=2$

$A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} -3\neq 0 \Rightarrow rang(A')=3$

el sistema es INCOMPATIBLE